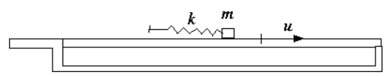
Étude d'un mouvement «collé-glissé»

Il existe de nombreuses situations relevant du modèle développé dans cet exercice : excitation d'une corde de violon par l'archet, mise en vibration d'un verre en cristal par le mouvement d'un doigt humecté sur son rebord, crissement d'une craie sur le tableau, freinage d'une bicyclette, etc. On étudie un solide en mouvement qui en entraîne un autre, lequel est retenu par une force élastique et il y a tantôt glissement, tantôt non.

On modélise l'action de l'archet sur la corde du violon par le modèle «collé-glissé». Un solide de masse m est posé sur un support animé d'une vitesse uniforme de module u et accroché à un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixe. A l'instant initial le ressort n'est pas tendu et le solide est solidaire du support mobile. On appelle f_s le coefficient de frottement statique et $f_d < f_s$ le coefficient dynamique (cf figure).



Question 1 :
Faire un bilan des forces, paramétrer le mouvement puis détailler les équations disponibles qu'il y ait glissement ou non.

On laisse au lecteur le soin de compléter la figure. La masse m d'abscisse x est soumise à son poids, vertical descendant et de module $m\,g$, à la force exercée par le ressort, horizontale de valeur $-k\,x$ et à la réaction du support dont la composante verticale vers le haut est notée N et la composante horizontale vers la droite, T. Le mouvement est horizontal, donc en projetant le principe fondamental appliqué à la masse, on obtient sur la verticale puis l'horizontale :

$$0 = N - m\,g \qquad \text{(équation 1)}$$

$$m\,\ddot{x} = T - k\,x \qquad \text{(équation 2)}$$

Question 2 :
A quel moment le solide commence-t-il à glisser ? Représenter la première phase du mouvement dans l'espace des phases.

Au départ, il n'y a pas glissement, la vitesse *relative* de m par rapport au support est nulle donc sa vitesse *absolue* est celle du support soit $\dot{x} = u$. En dérivant, on en déduit $\ddot{x} = 0$ et en intégrant, avec $x = 0$ à l'instant initial (ressort non tendu), $x = u\,t$; l'équation 1 et l'équation 2 deviennent :

$$N = m\,g$$

$$T = k\,u\,t$$

L'hypothèse du non-glissement suppose $T < f_s\,N$ soit

$$k\,u\,t < f_s\,m\,g \qquad \text{soit} \qquad t < t_1 = \frac{f_s\,m\,g}{k\,u}$$

Dans l'espace des phases (rappelons qu'il décrit le mouvement par la trajectoire d'un point d'abscisse $x(t)$ et qui a $\dot{x}(t)$ pour ordonnée), le point reste à l'ordonnée u et décrit un segment AB entre $x = 0$ et $x_1 = u\,t_1 = \frac{f_s\,m\,g}{k}$. Voir la figure récapitulative en fin d'exercice.

Question 3 :
Quel est ensuite son mouvement ? Représenter cette deuxième phase du mouvement dans l'espace des phases.

Cette fois le support va plus vite que m qui glisse vers l'arrière ; on a donc $T = +f_d\,N$ et N est donné par l'équation 1, donc $T = f_d\,m\,g$ que l'on reporte dans l'équation 2 :

$$m\,\ddot{x} = f_d\,m\,g - k\,x \qquad \text{ou} \qquad m\,\ddot{x} + k\,x = f_d\,m\,g$$

dont la solution est de la forme :

$$x(t) = x_2 + A\,\cos(\omega\,t) + B\,\sin(\omega\,t) \qquad \text{avec} \qquad x_2 = \frac{f_d\,m\,g}{k} < x_1 \qquad \text{et} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{d'où} \qquad \dot{x}(t) = -A\,\omega\,\sin(\omega\,t) + B\,\omega\,\cos(\omega\,t)$$

Pour alléger le calcul des constantes d'intégration A et B, supposons que l'on ait remis le chronomètre à zéro à la fin de la première phase, on a donc à $t = 0$ (nouvelle origine) $x(0) = x_1$ et $\dot{x}(0) = u$ (continuité de la vitesse) ; on a donc, en reportant :

$$x_1 = x_2 + A \qquad \text{et} \qquad u = B\,\omega$$

On en déduit aisément les valeurs de A et B que l'on reporte dans les expressions de x et $\dot{x}$

$$x(t) = x_2 + (x_1 - x_2)\,\cos(\omega\,t) + \frac{u}{\omega}\,\sin(\omega\,t)$$

$$\dot{x}(t) = -(x_1 - x_2)\,\omega\,\sin(\omega\,t) + u\,\cos(\omega\,t)$$

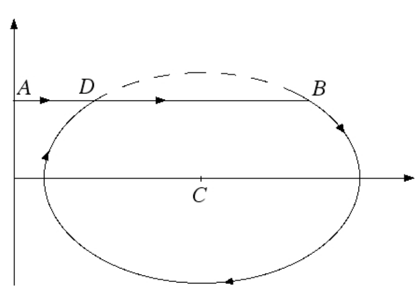
Comme on est très fort en trigonométrie, on définit L par $L^2 = (x_1 - x_2)^2 + (u/\omega)^2$ et φ tel que $\cos\varphi = (x_1 - x_2)/L > 0$ et $\sin\varphi = u/L\omega > 0$, soit, par exemple, $\varphi = \arctan[(x_1 - x_2)\,\omega/u]$. Alors

$$x(t) = x_2 + L\,[\cos(\omega\,t)\,\cos\varphi + \sin(\omega\,t)\,\sin\varphi] = x_2 + L\,\cos(\omega\,t - \varphi)$$

et par dérivation

$$\dot{x}(t) = -L\,\omega\,\sin(\omega\,t - \varphi)$$

Sous cette forme, il est clair que la trajectoire dans l'espace des phases est un ellipse de centre C d'abscisse x_2 et d'ordonnée nulle, de demi grand axe horizontal L, de demi petit axe vertical $L\,\omega$ (au sens strict, la notion de petit et grand axes n'est pas ici pertinente car l'abscisse et l'ordonnée ne sont pas homogènes) et parcourue dans le sens horaire. Remarquons que le demi «petit» axe $L\,\omega = \sqrt{\omega^2\,(x_1 - x_2)^2 + u^2}$ est supérieur à u. Voir la figure récapitulative ci-dessous (complétée par le résultat de la question qui suit).



Question 4 :
Montrer que le glissement cesse à son tour. Que se passe-t-il ensuite ?

Le calcul précédent suppose que la masse m glisse vers l'arrière, c'est-à-dire que sa vitesse reste inférieure à u ; vu la valeur du demi petit axe, c'est impossible. C'est ici que l'espace des phases s'avère être d'un précieux secours : on y voit clairement que l'ellipse décrivant la deuxième phase du mouvement traverse la droite horizontale d'ordonnée u en un point D ; au-delà, la vitesse de m dépasserait u. Donc au point D, la masse m cesse de glisser et est entraînée par le support à la vitesse u et dans l'espace des phases, on devine aisément que l'on parcourt le segment horizontal DB et que le mouvement ultérieur sera fait de successions de glissement (portion d'ellipse de B à D) et de non-glissement (segment DB).